PETRE NĂCHILĂ

GEOMETRIE PENTRU TOȚI

CLASELE a IX-a – a X-a

Editura NOMINA

CUPRINS

Capitolul 1
VECTORI ÎN PLAN

1.1. Segmente orientate. Relaţia de echipolenţă. Vectori

În ştiinţă şi tehnică se lucrează cu mărimi de natură diferită. Unele mărimi sunt bine determinate doar de un număr care reprezintă măsura lor. Aceste mărimi se numesc mărimi scalare (sau scalari). Alte mărimi se numesc mărimi vectoriale. Exemple de mărimi scalare: lungimea, masa, volumul, lucrul mecanic, temperatura, rezistenţa unui conductor. Exemple de mărimi vectoriale: forţa, viteza, acceleraţia, momentul unei forţe. O pereche ordonată (A, B) de puncte din plan se numeşte *segment orientat* (bipunct) şi notează cu $\overline{AB}$. Punctul A este originea, iar punctul B este extremitatea segmentului orientat. Segmentul orientat $\overline{AA}$ este segmentul nul. Dreapta AB reprezintă suportul (direcţia) segmentului orientat. Modulul segmentului orientat $\overline{AB}$ este lungimea segmentului $[AB]$ (notată cu AB). Dacă $A \neq B$, segmentele orientate $\overline{AB}$ şi $\overline{BA}$ se numesc *opuse*. Două segmente orientate $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ au aceeaşi direcţie dacă $AB \parallel CD$ sau dreptele AB şi CD coincid. Două segmente orientate $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ cu aceeaşi direcţie au acelaşi sens dacă:

a) în cazul $AB \neq CD$, punctele B şi D sunt de aceeaşi parte a dreptei (figura 1);

b) în cazul în care dreptele AB şi CD coincid avem una din poziţiile a), b), c), d) din figura 2.

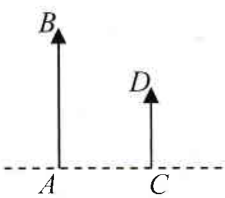

Fig. 1

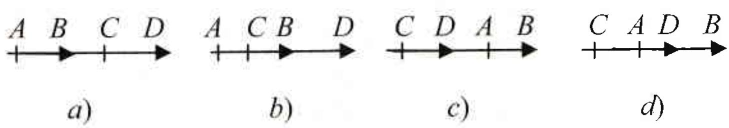

Fig. 2

Segmentul orientat $\overline{AA}$ are sensul şi direcţia nedeterminate.

DEFINIŢIE. Două segmente orientate $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ se numesc *echipolente* (notăm $\overline{AB} \sim \overline{CD}$) dacă au acelaşi modul, aceeaşi direcţie şi acelaşi sens.

PROPOZIŢIA 1. Relaţia de echipolenţă „~" definită pe mulţimea segmentelor orientate *este relaţie de echivalenţă*, adică are proprietăţile de:

– reflexivitate: $\overline{AB} \sim \overline{AB}$;

– simetrie: $\overline{AB} \sim \overline{CD} \Rightarrow \overline{CD} \sim \overline{AB}$;

– tranzitivitate: $\overline{AB} \sim \overline{CD}$; $\overline{CD} \sim \overline{EF} \Rightarrow \overline{AB} \sim \overline{EF}$.

DEFINIȚIE. Mulțimea segmentelor orientate echipolente cu un segment orientat $\overline{AB}$ formează o clasă de echivalență numită *vector liber* și notată cu $\overrightarrow{AB}$. Dacă originea A a vectorului $\overrightarrow{AB}$ este fixată, vectorul $\overrightarrow{AB}$ se numește *vector legat* (în caz contrar avem *vector alunecător*). Dacă $A = B$, vectorul $\overrightarrow{AB}$ (adică $\overrightarrow{AA}$) se numește *vector nul* și este notat cu $\vec{O}$. Notăm cu V mulțimea tuturor vectorilor din planul P.

Vectorul $\overrightarrow{BA}$ este vectorul opus lui $\overrightarrow{AB}$ și este notat cu $-\overrightarrow{AB}$. Doi vectori care au aceeași direcție se numesc *vectori coliniari*. Vectorul de lungime (modul) 1 se numește *vector unitate*. Segmentul orientat $\overrightarrow{AB}$ se numește reprezentant al vectorului $\overrightarrow{AB}$. Vectorul nul $\vec{O}$ nu are direcție și se consideră coliniar cu orice vector. Doi vectori coliniari pot avea același sens sau sensuri opuse.

PROPOZIȚIA 2. Fie un segment orientat $\overline{AB}$ în planul $\mathscr{P}$. Pentru orice punct $M \in \mathscr{P}$ există un singur punct $N \in \mathscr{P}$ astfel încât $\overline{MN} \sim \overline{AB}$. Avem cazurile:

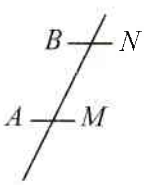

Fig. 3 a)

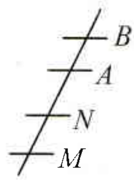

Fig. 3 b)

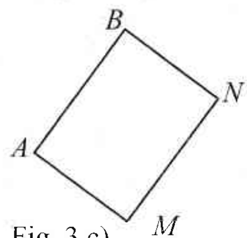

Fig. 3 c)

PROPOZIȚIA 3: Fiind dat un vector $\overline{V}$ și un punct M există un singur punct unic N astfel încât $\overrightarrow{MN} = \vec{V}$ (Fig. 3).

TEOREMĂ.

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow ABCD$ paralelogram sau A, B, C, D coliniare;

b) $ABCD$ paralelogram $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

Probleme propuse

A. Determinați perechile de vectori care au:

a) același modul; b) aceeași direcție; c) același sens; d) sensuri opuse,

în cazul următoarelor figuri geometrice:

1. $ABCD$ paralelogram, $AC \cap BD = \{O\}$;

2. $ABCD$ dreptunghi, $AC \cap BD = \{O\}$;

3. $ABCD$ romb, $AC \cap BD = \{O\}$;

4. $ABCD$ pătrat, $AC \cap BD = \{O\}$;

5. $ABCD$ trapez isoscel, $AD = BC$, $AC \cap BD = \{O\}$;

6. $ABCDEF$ hexagon regulat cu centrul O.

7. Fie M mijlocul segmentului (AB) şi punctele N şi P astfel încât $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{PB}$. Demonstraţi că punctele M, N, P sunt coliniare.

8. Fie triunghiul ABC şi P, M, N mijloacele segmentelor (AB), (BC), (CA). Demonstraţi că:

a) $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NC}$;
b) $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{PM}$;
c) $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{PB}$;
d) $\overrightarrow{PE} = \overrightarrow{EN} \Leftrightarrow E$ este mijlocul lui (NP).

9. Fie paralelogramele $ABCD$ şi $CDEF$. Demonstraţi că:

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$;
b) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF}$.

10. Fie paralelogramul $ABCD$ şi M, N, P, Q mijloacele laturilor (AB), (BC), (CD), (DA).

a) Demonstraţi că $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$, $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MQ}$.
b) Determinaţi mijloacele segmentelor (NQ) şi (MP).

11. Fie punctele A, B, M, N, P astfel încât $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{PB}$. Demonstraţi că punctele M, N, P sunt coliniare.

12. Fie triunghiul ABC şi punctele D, E, F astfel încât $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AC}$. Demonstraţi că D este mijlocul lui (EF).

13. Câţi vectori sunt determinaţi de 3 puncte distincte din plan? Dar de 4 puncte distincte din plan?

14. Fie $ABCD$ paralelogram, M simetricul lui B în raport cu A, iar N simetricul lui D în raport cu C. Demonstraţi că:

a) $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CN}$;
b) $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BN}$;
c) AC, BD şi MN sunt concurente.

15. Fie triunghiul ABC şi punctul $D \in (BC)$. Fie punctele M, N, P astfel încât $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{ND}$, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PC}$. Demonstraţi că punctele M, N, P sunt coliniare.

16. Fie paralelogramul $ABCD$. Luând în calcul şi diagonalele, precizaţi:

a) câte direcţii determină dreptele ce conţin câte două dintre vârfuri;
b) semidreptele determinate de vârfurile paralelogramului care au acelaşi sens, respectiv sensuri opuse.

17. Fie paralelogramele $ABCD$ şi $CDEF$. Se consideră dreptele, respectiv semidreptele determinate de câte două din punctele A, B, C, D, E, F. Scrieţi:

a) dreptele cu aceeaşi direcţie;
b) semidreptele cu acelaşi sens;
c) semidreptele cu sensuri diferite.

18. Fie hexagonul regulat $ABCDEF$, iar M, N, P, Q, R, S mijloacele laturilor (AB), (BC), (CD), (DE), (EF), respectiv (FA). Fie $AD \cap BE = \{O\}$. Scrieţi:

a) segmentele orientate care au aceeaşi direcţie cu $\overline{AB}$;

b) segmentele orientate care au aceeaşi direcţie cu $\overline{OE}$;

c) segmentele orientate care au aceeaşi lungime cu $\overline{CD}$;

d) segmentele orientate care au aceeaşi lungime cu $\overline{FC}$;

e) segmentele orientate care au aceeaşi lungime cu $\overline{NS}$.

19. Fie dreptunghiul $ABCD$ şi fie $\overline{EF} \sim \overline{BA}$. Determinaţi perechile de segmente orientate echipolente.

20. Fie trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$ şi $E = \text{pr}_{AB}\, D$, $F = \text{pr}_{AB}\, C$. Stabiliţi valoarea de adevăr a afirmaţiilor:

a) $\overline{AB} \sim \overline{CD}$; b) $\overline{AB}$ şi $\overline{DC}$ au acelaşi sens; c) $\overline{AD} \sim \overline{BC}$;

d) $\overline{AD}$ şi $\overline{BC}$ au acelaşi sens; e) $\overline{AD}$ şi $\overline{BC}$ au aceeaşi lungime;

f) $\overline{CF} \sim \overline{DE}$; g) $\overline{CF} \sim \overline{ED}$; h) $CF = DE$;

i) $\overline{AE} \sim \overline{BF}$; j) $\overline{EA} \sim \overline{BF}$; k) $EA = FB$.

21. Fie pătratul $ABCD$ şi punctele M, N, P, Q, astfel încât $\overline{AM} \sim \overline{CB}$, $\overline{BN} \sim \overline{DC}$, $\overline{CP} \sim \overline{AD}$, $\overline{DQ} \sim \overline{BA}$. Demonstraţi că:

a) $\overline{MN} \sim \overline{QP}$; b) $MNPQ$ este pătrat; c) $A_{MNPQ} : A_{ABCD} = n \in \mathbb{N}^*$.

22. Fie triunghiul ABC şi punctele $D \in AB - \{A, B\}$, $E \in AC$, $DE \parallel BC$. Precizaţi cel puţin trei perechi de vectori:

a) coliniari; b) necoliniari.

23. Considerând vârfurile paralelogramului $ABCD$, determinaţi:

a) numărul segmentelor obţinute;

b) numărul segmentelor orientate obţinute;

c) numărul vectorilor liberi.

24. Fie triunghiul ABC cu $AB = AC$ şi fie pătratele $ABDE$ şi $ACFG$ în exteriorul triunghiului ABC. Demonstraţi că:

a) $|\overrightarrow{BE}| = |\overrightarrow{GC}|$;

b) $\overrightarrow{CB}$ şi $\overrightarrow{EG}$ sunt coliniari;

c) $BCGE$ este trapez isoscel.

25. Fie patrulaterul convex $ABCD$ şi M, N, P, Q mijloacele laturilor (AB), (BC), (CD), (DA). Demonstraţi că;

a) $\overline{QP} \sim \overline{MN}$; b) $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MQ}$; c) $MNPQ$ este paralelogram.

1.2. Adunarea şi scăderea vectorilor

DEFINIŢIE. Suma $\vec{u}+\vec{v}$ a doi vectori $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ se obţine astfel: Se consideră punctele O, A, B astfel încât $\overrightarrow{OA}=\vec{u}, \overrightarrow{OB}=\vec{v}$. Se construieşte paralelogramul $OACB$. Atunci $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{OC}$ (Fig. 4).

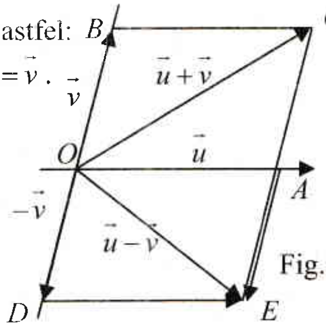

Fig. 4

OBSERVAŢII:

1. $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$ (formula lui Chasles) – Fig. 5

2. Dacă $B=A$ avem $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

TEOREMĂ. Adunarea vectorilor are proprietăţile următoare:

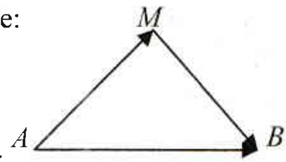

Fig. 5

a) *asociativitate*: pentru orice vectori $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\in V$ avem:

$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$;

b) *comutativitate*: pentru orice $\vec{u}, \vec{v}\in V$ avem $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$;

c) *vectorul nul* este element neutru: $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}, \forall\vec{u}\in V$;

d) pentru orice vector $\vec{u}\in V$ există vectorul opus $\left(-\vec{u}\right)$:

$\vec{u}+\left(-\vec{u}\right)=\left(-\vec{u}\right)+\vec{u}=\vec{0}$.

DEFINIŢIE. Diferenţa vectorilor $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ este vectorul $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+\left(-\vec{v}\right)$.

OBSERVAŢIE. Din figura 4 avem $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+\left(-\vec{v}\right)=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{BA}$.

Probleme rezolvate

1. Demonstraţi că patrulaterul convex $ABCD$ este paralelogram dacă şi numai dacă pentru orice punct $M\in(ABC)$ avem $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

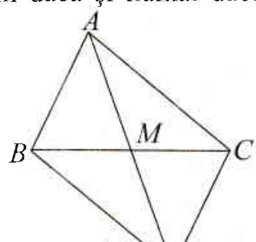

Fig. 6

Soluţie. Vom nota $\vec{u}+\vec{u}=2\vec{u}$ (semnificaţia notării va fi dată în paragraful 1.3). Fie ΔABC şi $M\in(BC)$. Demonstrăm că, dacă M este mijlocul lui (BC), avem $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$ (figura 6). Într-adevăr, avem $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$, unde $ABDC$ este paralelogram. Cum M este mijlocul lui (BC), M este mijlocul lui (AD) şi deci $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AM}$. Reciproc, dacă $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$, atunci M este mijlocul lui BC. Avem $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MA}\right)+\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MA}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=\vec{0}\Leftrightarrow M$ este mijlocul lui (BC).

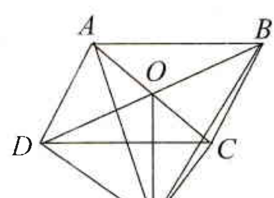

Fig. 7

Fie acum M un punct oarecare în planul paralelogramului $ABCD$ de centru O. Din triunghiurile MAC şi MBD cu mediana $\overline{MO}$ avem $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MO}$ şi deci $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$. Reciproc, presupunem $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$. Atunci avem $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MD} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ABCD$ paralelogram.

2. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Demonstrați că dacă $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=\left|\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\right|$, atunci triunghiul ABC este echilateral.

Soluție. Fie D, E, F proiecţiile lui O pe AB, AC, BC şi fie paralelogramele $OAMB$, $OANC$, $OBPC$. Avem $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{ON}$. Din ipoteză rezultă că $\left|\overrightarrow{OM}\right|=\left|\overrightarrow{ON}\right|=\left|\overrightarrow{OP}\right|$ şi atunci $\left|\overrightarrow{OD}\right|=\left|\overrightarrow{OE}\right|=\left|\overrightarrow{OF}\right|$. Cum O este centrul cercului circumscris ΔABC, rezultă că ΔABC este echilateral.

3. Fie M, N, P mijloacele laturilor (BC), (CA), (AB) ale triunghiului ABC şi O un punct oarecare în planul (ABC). Demonstraţi că:

a) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$; b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OD}$.

Soluție. a) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{BN}+2\overrightarrow{CP}=\vec{0} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)+$ $+\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}\right)+\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}\right)=\vec{0}+\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$.

Probleme propuse

1. Fie paralelogramul $ABCD$ şi M un punct din plan astfel încât $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{BM}$. Demonstraţi că: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AB}$.

2. Fie paralelogramul $ABCD$ de centru O. Calculaţi:

a) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AO}$; b) $\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{AD}$; c) $\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{OB}$;

d) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{OD}$; e) $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{DO}$; f) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{OD}$.

3. Fie ΔABC şi punctele $N, P \in BC$, $BN=NP=PC$. Demonstraţi că: $\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

4. Fie ΔABC şi punctele $N, P \in BC$ astfel încât $BN=PC$. Demonstraţi că:

$$\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}.$$

5. Demonstraţi că pentru orice vectori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in V$, $n \geq 2$ avem:

a) $\left|\vec{v}_1+\vec{v}_2\right| \leq \left|\vec{v}_1\right|+\left|\vec{v}_2\right|$; b) $\left|\vec{v}_1+\vec{v}_2+\ldots+\vec{v}_n\right| \leq \left|\vec{v}_1\right|+\left|\vec{v}_2\right|+\ldots+\left|\vec{v}_n\right|$.

6. Fie $ABCD$ patrulater convex, iar F şi E mijloacele segmentelor (AD) şi (BC). Demonstraţi că $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{FE}$.

7. Fie $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ vectori cu aceeaşi direcţie şi acelaşi sens. Comparaţi:

a) $\left|\vec{u}+\vec{v}\right|$ cu $\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|$;

b) $\left|\vec{u}-\vec{v}\right|$ cu $\left|\vec{u}\right|-\left|\vec{v}\right|$ şi cu $\left|\vec{v}\right|-\left|\vec{u}\right|$.

8. Fie $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ vectori cu aceeaşi direcţie şi sensuri contrare astfel încât $|\vec{u}| \geq |\vec{v}|$. Comparaţi $|\vec{u}+\vec{v}|$ cu $|\vec{u}-\vec{v}|$.

9. Condiţia necesară şi suficientă ca vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ să formeze un triunghi este ca $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ şi $a+b \neq c$, $a+c \neq b$, $b+c \neq a$.

10. Fie punctele A, B, C necoliniare, D simetricul lui A în raport cu mijlocul M al lui (BC).

a) Demonstraţi că $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$.

b) Fie $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=a$. Determinaţi $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|$ dacă $m(\sphericalangle ABC) \in \{60°, 90°, 120°\}$.

11. Fie un punct M în planul triunghiului ABC.

a) Construiţi punctele D, E, F, ştiind că $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{AB}$.

b) Demonstraţi că A, B, C sunt mijloacele segmentelor (DE), (EF), (DF).

c) Comparaţi vectorii $\vec{u}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ şi $\vec{v}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}$.

12. Fie O un punct în planul paralelogramului $ABCD$. Demonstraţi că:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}.$$

13. Demonstraţi că pentru orice vectori $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ avem $|\vec{u} \pm \vec{v}| \leq |\vec{u}|+|\vec{v}|$. În ce caz avem egalitate?

14. Demonstraţi că triunghiul ABC este dreptunghic în A dacă şi numai dacă $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$.

15. Demonstraţi că patrulaterul convex $ABCD$ este paralelogram dacă şi numai dacă pentru orice punct $O \in (ABC)$ avem $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$.

16. Fie H ortocentrul triunghiului ABC. Fie vectorii $\overrightarrow{HD}, \overrightarrow{HE}, \overrightarrow{HF}$ având sens opus vectorilor $\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}$ şi modulele egale cu ale vectorilor $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}$. Demonstraţi că:

a) $\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{HF}=\vec{0}$; b) $\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FE}=\vec{0}$.

17. Fie vectorii $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ cu acelaşi modul astfel încât $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$. Ce puteţi afirma despre punctele A, B, C?

18. Fie vectorii $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$ cu acelaşi modul astfel încât: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$. Ce puteţi afirma despre punctele A, B, C, D?

19. Fie $ABCD$ paralelogram şi fie M un punct oarecare în interiorul acestuia. Prin M se duc dreptele $d \parallel AD$, $d' \parallel AB$ care intersectează AB în E, CD în F, AD în G şi BC în H. Demonstraţi că $\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{AC}$.

20. Fie pătratele $ABCD$ şi $MNPQ$ având acelaşi centru O, iar diagonalele lor formează unghiuri de 45°. Determinaţi vectorul $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{DQ}$.

21. Fie paralelogramul $ABCD$ de centru O. Determinaţi punctele M şi N dacă:
$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC};\quad \overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}.$$

22. Fie $ABCD$ un paralelogram şi $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. Exprimaţi în funcţie de $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ vectorii $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CA}$.

23. Fie dreptele d, d' concurente în punctul O şi A în planul (dd'). Determinaţi $B \in d$, $C \in d'$, astfel încât $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}$.

24. Fie punctele necoliniare A, O, B cu $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|$, iar $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$. Demonstraţi că $[\overrightarrow{OC}$ este bisectoarea unghiului AOB.

25. Fie O centrul paralelogramului $ABCD$ şi punctul oarecare $M \in (ABC)$. Demonstraţi că:

a) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$;

b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\cdot\overrightarrow{MO}$.

26. Fie triunghiul ABC şi punctele M, $N \in (BC)$, astfel încât $(BM) = (CN)$. Demonstraţi că $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

27. Fie punctul O în planul patrulaterului convex $ABCD$, iar M, N, P, Q simetricele lui O faţă de mijloacele laturilor (AB), (BC), (CD), (DA).

a) Demonstraţi că $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{QN}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$.

b) Demonstraţi că $MNPQ$ este paralelogram.

28. Fie un punct M pe diagonala (AC) a pătratului $ABCD$. Prin M se construiesc segmentele $PQ \perp AB$, $RS \parallel AB$, cu $P \in AB$, $Q \in CD$, $R \in AD$, $S \in BC$. Demonstraţi că:

a) vectorii $\overrightarrow{PR}$ şi $\overrightarrow{SQ}$ au aceeaşi direcţie;

b) vectorii $\overrightarrow{RQ}$ şi $\overrightarrow{PS}$ au acelaşi modul.

29. Triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ au acelaşi centru de greutate. Arătaţi că $|\overrightarrow{AA'}|$, $|\overrightarrow{BB'}|$, $|\overrightarrow{CC'}|$ pot fi lungimile laurilor unui triunghi.

30. Vectorii $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ de modul 1 se află în acelaşi semiplan limitat de o dreaptă ce trece prin punctul O. Demonstraţi că $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|\geq 1$.

1.3. Înmulțirea vectorilor cu scalari. Coliniaritate

DEFINIȚIE. Fie vectorul $\vec{v} \in V$ și numărul $\alpha \in \mathbb{R}$. Produsul dintre vectorul și numărul real α este vectorul $\alpha\vec{v}$ definit astfel:

a) $\alpha\vec{v} = \vec{0}$ dacă $\alpha = 0$ sau $\vec{v} = \vec{0}$;

b) pentru $\alpha \neq 0$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\alpha\vec{v}$ are modulul $|\alpha| \cdot |\vec{v}|$, are direcția lui $\vec{v}$, are sensul lui $\vec{v}$ dacă $\alpha > 0$ și sens contrar lui $\vec{v}$ dacă $\alpha < 0$.

TEOREMA 1. Produsul vectorilor cu scalari are proprietățile:

a) $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$;

b) $(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{v} \in V$;

c) $(\alpha\beta)\vec{v} = \alpha(\beta\vec{v}) = \beta(\alpha\vec{v})$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{v} \in V$;

d) $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$, $\forall \vec{v} \in V$.

TEOREMA 2. Vectorii nenuli $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt coliniari dacă și numai dacă există $x \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $\vec{v} = x \cdot \vec{u}$.

TEOREMA 3. Fie vectorii necoliniari și nenuli $\vec{u}$ și $\vec{v}$. Fie α, $\beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = 0$. Atunci avem $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

TEOREMA 4. Fie dreapta AB și punctul M în același plan. Avem $M \in AB$ dacă și numai dacă există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$.

Probleme rezolvate

1. Linia mijlocie a unui triunghi este paralelă cu a treia latură și are lungimea egală cu $\frac{1}{2}$ din lungimea acesteia.

Soluție. Fie ΔABC, $D \in (AB)$, $E \in (AC)$, $DA = DB$, $EA = EC$. Avem $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Reciproc, dacă $D \in (AB)$, $E \in (AC)$, $DE \parallel BC$, $DE = \frac{1}{2}BC$, atunci (DE) este linie mijlocie.

2. Fie trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$, M, N, P, Q mijloacele segmentelor (AD), (BC), (AC), (BD). Atunci:

a) M, N, P, Q sunt coliniare;

b) $MN \parallel AB$, $2MN = AB + CD$;

c) $PQ \parallel AB$, $2PQ = AB - CD$.

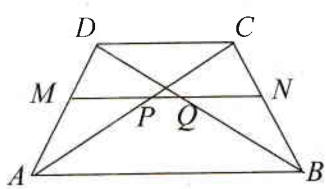

Fig. 8

Soluţie. a) Avem $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{QN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{MQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PN}$. Atunci $MP \parallel DC \parallel NQ$, $MQ \parallel NP \parallel AB$ şi deci M, N, P, Q sunt coliniare;

b) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}\right)$. Cum $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB}$ au acelaşi sens, rezultă că

$$MN=\frac{1}{2}(AB+CD);$$

c) $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{MQ}-\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}\right)\Rightarrow PQ=\frac{1}{2}(AB-DC)$.

3. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Atunci pentru orice punct M din planul triunghiului avem $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

Soluţie. Fie D mijlocul lui (BC) şi E mijlocul lui (AG). Avem $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{ME}-\overrightarrow{MG}+2\overrightarrow{MD}=$ $=2\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MD}\right)-\overrightarrow{MG}=4\overrightarrow{MG}-\overrightarrow{MG}=3\overrightarrow{MG}$.

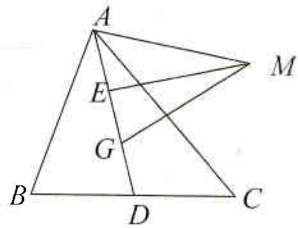

Fig. 9

4. Fie O, G, H, I centrul cercului circumscris, centrul de greutate, ortocentrul, respectiv centrul cercului înscris pentru triunghiul ABC. Atunci:

a) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\cdot\overrightarrow{OG}$; b) $\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{CH}=3\cdot\overrightarrow{GH}$;

c) $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{CI}=3\cdot\overrightarrow{GI}$; d) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Soluţie. Luăm în locul lui M, în problema 3, O, H, I, respectiv G.

5. Fie O, G, H centrul cercului circumscris, centrul de greutate şi ortocentrul triunghiului ABC. Demonstraţi că punctele O, G, H sunt coliniare (dreapta lui Euler) şi că $OH=3\cdot OG$, $2\cdot HO=3\cdot HG$.

Soluţie. Luăm doar cazul ΔABC ascuţitunghic. Fie $D=\mathrm{pr}_{BC}A$, M mijlocul lui (BC), $E=\mathrm{sim}_{BC}O$ (figura 10). Avem $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OE}=2\cdot\overrightarrow{OM}$ şi cum $AHEO$ este paralelogram, rezultă că $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OH}$. Dar $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\cdot\overrightarrow{OG}$ şi deci $3\cdot\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OH}$. Obţinem $OH=3\cdot OG$, $2\cdot HO=3\cdot HG$.

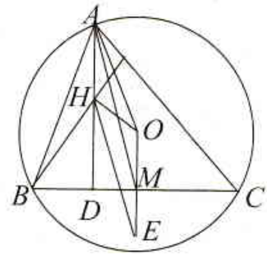

Fig. 10

Probleme propuse

1. Fie M mijlocul segmentului (AB). Pentru orice punct O din plan avem:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right).$$

2. Linia mijlocie a unui triunghi este paralelă cu a treia latură a triunghiului şi are lungimea egală cu $\frac{1}{2}$ din lungimea acesteia.